

4. Differenzialrechnung

4.13 Wendepunkte

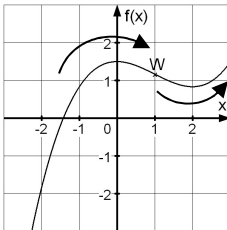
Wendepunkte

Der Graph einer ganzrationalen Funktion kann Abschnitte mit Linkskrümmung und Abschnitte mit Rechtskrümmung aufweisen. Die Punkte, an denen der Übergang von der einen zur anderen Art der Krümmung erfolgt, nennt man Wendepunkte.

Ein Punkt, in dem die Krümmung wechselt, heißt Wendepunkt.

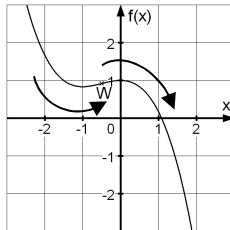
Es gibt Wendepunkte, zu denen eine waagerechte Tangente gehört. Wendepunkte mit dieser Besonderheit sind bereits als Terrassenpunkte bekannt.

Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente ist ein Terrassenpunkt (oder Sattelpunkt).



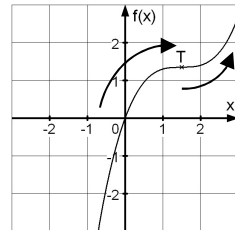
$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1,5$$

Übergang von
Rechtskrümmung zur
Linkskrümmung:
 $W(1; \frac{7}{6})$ ist ein
Wendepunkt.



$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Übergang von
Linkskrümmung zur
Rechtskrümmung:
 $W(-0,5; \frac{11}{12})$ ist ein
Wendepunkt.



$$f(x) = 0,4x^3 - 1,8x^2 + 2,7x$$

Krümmungswechsel
und waagerechte
Tangente:
 $T(1,5; 1,35)$ ist ein
Wendepunkt und ein
Terrassenpunkt.

4. Differenzialrechnung

4.13 Wendepunkte

Die Berechnung der Wendepunkte

Grundlage ist der bereits bekannte Zusammenhang von zweiter Ableitung und Krümmung:

$$\begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \rightarrow \text{Linkskr\"ummung} \\ f''(x) < 0 & \rightarrow \text{Rechtskr\"ummung} \end{array}$$

Da die Wendepunkte an den Stellen des \u00dcberganges von der einen zur anderen Kr\u00fcmmungsart liegen, muss an den Wendestellen der \u00dcbergang der zweiten Ableitung von positiven zu negativen oder von negativen zu positiven Werten erfolgen. Demzufolge muss der Wert der zweiten Ableitung an einer Wendestelle null betragen.

notwendige Bedingung f\u00fcr die Existenz von Wendepunkten:

$$f''(x) = 0$$

Da aber bei einer Geraden keine Kr\u00fcmmung vorliegt, betr\u00e4gt der Wert der zweiten Ableitung an jeder Stelle null, ohne dass ein Wendepunkt existiert. Die oben genannte Bedingung ist deshalb f\u00fcr die Existenz eines Wendepunktes nicht hinreichend.

Entscheidend f\u00fcr die Existenz eines Wendepunktes ist also nicht allein die Tatsache, dass die Kr\u00fcmmung den Wert null annimmt, sondern auch, dass der Wert null bei einer *\u00c4nderung* der Kr\u00fcmmung auftritt.

Die \u00c4nderung der Kr\u00fcmmung kann durch die Ableitung der zweiten Ableitung, also durch die dritte Ableitung beschrieben werden. Diese muss irgendeinen von null verschiedenen Wert annehmen.

hinreichende Bedingung f\u00fcr die Existenz von Wendepunkten:

$$f'''(x) \neq 0$$

Bemerkung: Bei der hinreichenden Bedingung kann zwischen zwei F\u00e4llen unterschieden werden.

$$\begin{array}{ll} f'''(x) < 0 & \rightarrow \text{Links - Rechts - \u00dcbergang der Kr\u00fcmmung} \\ f'''(x) > 0 & \rightarrow \text{Rechts - Links - \u00dcbergang der Kr\u00fcmmung} \end{array}$$